Teorien
bag
solkompasset

Preben M. Henriksen

31. juli 2007

Indhold

1 Indledning **2**

2 Koordinatsystemer **2**

3 Solens deklination **4**

4 Horisontalsystemet **5**

5 Solkompasset **9**

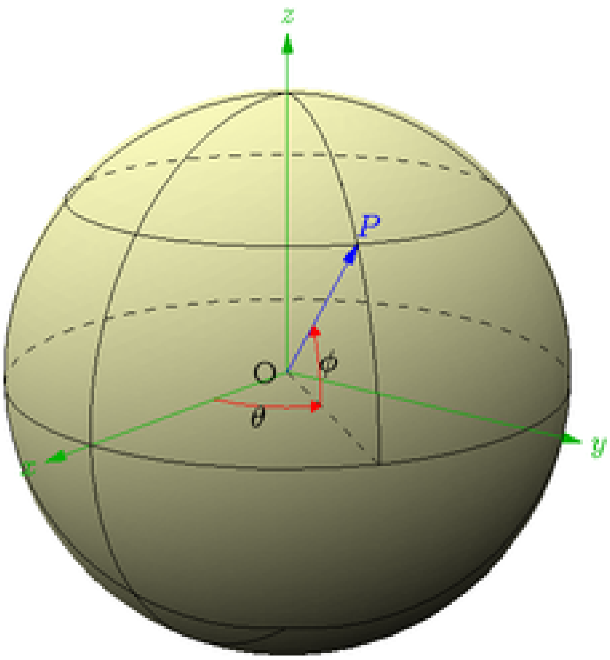
6 Appendiks **11**
6.1 Diverse formler 11
6.2 Sfærisk trigonometri 11

7 Litteraturliste **13**

1 Indledning

Matematisk baggrundsstof til solkompas programmet (jvf. *http: www.havhingsten.dk*) beregnet til 3.g A niveau. Der forudsættes ikke forhåndskendskab til sfærisk trigonometri.

2 Koordinatsystemer

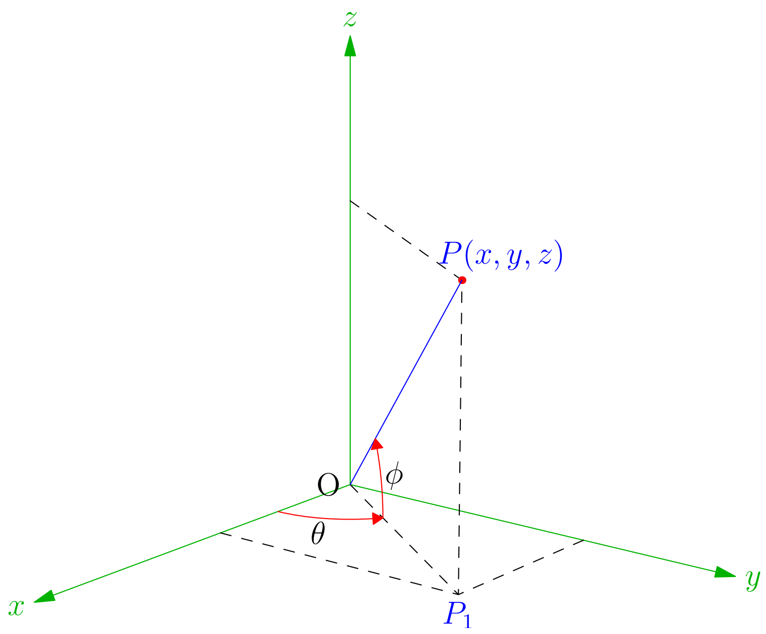


figur 1

Enhver position på jorden kan beskrives ved et par (θ, ϕ), hvor θ er længdegraden, og ϕ er breddegraden (regnet med fortegn) jvf. figuren ovenfor. Det indlagte koordinatsystem har Origo i jordens centrum, xy-planen er ækvatorplanen, og xz-planens skæring med jordkuglen bestemmer 0-meridianen (Greenwich). Storcirklen gennem nordpolen og stedet (P) kaldes stedets meridian.

Eksempel 1 København ligger 12,6° øst for Greenwich på bredden 55,7° nord, dvs. at $\theta = 12{,}6°$ og $\phi = 55{,}7°$, mens New York ligger 74,0° vest for Greenwich på bredden 40,8° nord, altså $\theta = -74{,}0°$ og $\phi = 40{,}8°$. □

Vi vil nu finde de kartesiske koordinater (x,y,z) til punktet P, og vi argumenterer ud fra følgende tegning:



Vi sætter længden af OP lig med r, og vi siger så, at P har de sfæriske koordinater (r, θ, ϕ). Vi lader P_1 være projektionen af P i xy-planen. Længden af linjestykket OP_1 bliver dermed $r\cos(\phi)$. Ved at projicere OP_1 ind på x henholdsvis y-aksen fås, at

$$x = r\cos(\theta)cos(\phi) \quad \text{og} \quad y = r\sin(\theta)cos(\phi)\,,$$

og da $z = r\sin(\phi)$, har vi hermed vist, at

$$(x,y,z) = (r\cos(\theta)cos(\phi), r\sin(\theta)cos(\phi), r\sin(\phi))\,. \tag{2}$$

Det er let at indse (jvf. bemærkning 3), at fomlen gælder for alle beliggenheder af P, hvis man regner vinklerne med fortegn, dvs at $\theta \in [-180°, 180°]$ og $\phi \in [-90°, 90°]$, hvor fortegnet følger omløbsretningen.

Bemærkning 3 Når du færdiggør beviset, kan du bruge de velkendte formler:

$$\cos(180°-v) = -\cos(v)\,, \sin(180°-v) = \sin(v)\,, \cos(-v) = \cos(v) \text{ og } \sin(-v) = -\sin(v)\,.$$

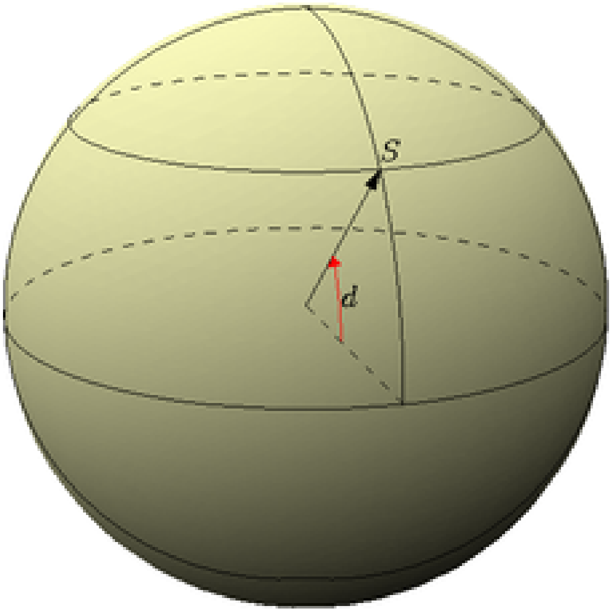
Øvelse 4 Prøv først at argumentere for formlen, når $90° < \theta < 180°$ og $0° < \phi < 90°$, og gør dernæst beviset færdigt. □

Koordinatsystemet i figur 1 kan let udvides til et koordinatsystem for himmelkuglen, som er en tænkt kugle med centrum i jordens centrum, og en radius som er 'uendelig' stor. Man forestiller sig så, at alle himmellegemer projiceres ind på himmelkuglen ved at skære linjen fra jordens centrum til himmellegemets centrum med himmelkuglen. Man skifter blot betegnelser, idet breddegraden kaldes for *deklinationen*, og længdegraden erstattes af timevinklen som er 0t i *stedets* meridian, og ellers går fra -12t til 12t (vokser i negativ omløbsretning).

Eksempel 5 Hvis solens timevinkel fx. er -1t, betyder det at solen står 15° øst for stedets meridian i himmelkuglens koordinatsystem, da solen står op i øst og bevæger sig 15° i timen .
I kapitel 4 om horisontalsystemet ser vi på eksempler, der viser, hvordan man kan beregne timevinklen ud fra et klokkeslæt. □

3 Solens deklination

Da vi kun interesserer os for solen, lader vi nu S betegne solens placering på himmelkuglen. I forhold til himmelkuglen vil solen bevæge sig på en lillecirkel parallel med ækvatorplanen gennem et døgn, da solens deklination praktisk taget er konstant gennem hele døgnet.



Deklinationen ændrer sig med årstiden, idet den går fra $-23.45°$ ved vintersolhverv til $23.45°$ ved sommersolhverv. Deklinationen kan med god tilnærmelse beskrives ved en harmonisk svingning af dagens nummer og med amplituden 23.45.

Øvelse 6 Lad $f(x) = 23.45 \sin(\omega x + \psi)$ være deklinationen, hvor x er dagens nummer i året (1 = 1.januar, osv.). Da perioden er 365 dage, får vi umiddelbart at

$$\omega = \frac{2\pi}{365}$$

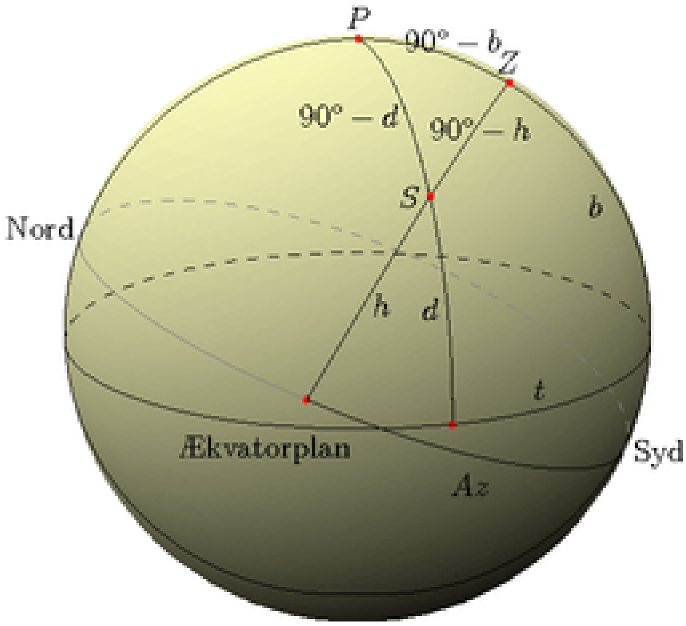
Bestem ψ, når $f(x) = 23.45$ ved sommersolhverv (dag nr 173).

Tjek den fundne forskrift ved forårsjævndøgn (79), efterårsjævndøgn (266) og vintersolhverv (356). □

Bemærkning 7 Lommeregneren skal indstilles til radianer, men funktionsværdien skal opfattes som et gradtal. □

4 Horisontalsystemet

Da vi skal beskrive solens gang hen over himlen fra et hvilken som helst sted på jorden er vi nødt til at indføre endnu et koordinatsystem (*horisontalsystemet*) idet solens højde måles lokalt i forhold til det vandrette plan - horisontplanet - og solens retning, som kaldes *azimuth*, måles tilsvarende i forhold til syd, jvf. den næste tegning, hvor horisontplanet er tegnet gennem jordens centrum :



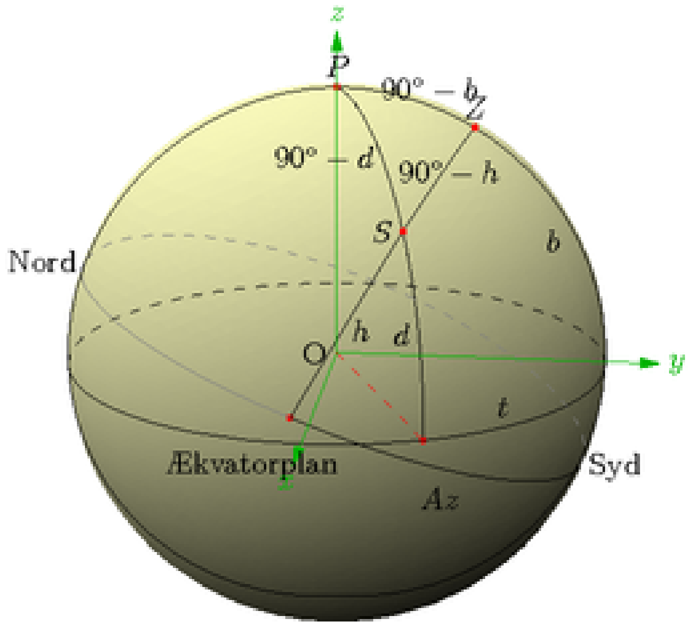
Da resten af teorien bygger på forståelsen for ovenstående tegning, vil vi her gennemgå den grundigt.

Horisontplanet er markeret med nord-syd. Læg mærke til at stedets meridian er kuglens ydre omrids (gennem P og Z), og at både timevinklen (t) og Azimuth (Az) måles derudfra. Punktet P er nordpolen, og Z er Zenithpunktet, dvs. det punkt der ligger lodret over betragteren. Stedets breddegrad (b) er derfor vinklen fra ækvatorplanet og op til Zenith. Solens deklination (d) måles ud fra ækvatorplanet, men solens højde (h) måles ud fra horisontplanet, idet højden er den vinkel som går mellem vandret og solen.

Vi ser, at der bestemmes en sfærisk trekant PSZ, og denne trekant gør det muligt at udtrykke solhøjden h ved hjælp af breddegraden b, deklinationen d og timevinklen t, idet følgende sætning gælder (hvor timevinklen t omregnes og indsættes som grader):

Sætning 8 $\sin(h) = \sin(b)\sin(d) + \cos(b)\cos(d)\cos(t)$.

Bevis Vi indlægger et koordinatsystem, således at stedets meridian ligger i yz-planet og ækvatorplanet ligger i xy-planet.



Da S har de sfæriske koordinater $(r, 90^\circ - t, d)$ bliver de kartesiske koordinater derfor

$$S = (r\cos(d)\cos(90^\circ - t), r\cos(d)\sin(90^\circ - t), r\sin(d))$$

jvf. formel 2. Heraf får vi så let, at

$$S = (r\cos(d)\sin(t), r\cos(d)\cos(t), r\sin(d)).$$

Da punktet Z har de sfæriske koordinater $(r, 90^\circ, b)$ får vi på samme måde de kartesiske koordinater:

$$Z = (0, r\cos(b), r\sin(b)).$$

Da vinklen mellem de to stedvektorer $\overrightarrow{OS}$ og $\overrightarrow{OZ}$ netop er $90^\circ - h$, finder vi let skalarproduktet:

$$\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{OZ} = r^2\cos(90^\circ - h) = r^2\sin(h)$$

jvf. en velkendt sætning (se evt. appendiks (6.1.22)). Hvis vi udregner skalarproduktet ud fra vores koordinatsæt, får vi

$$\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{OZ} = r^2\cos(b)\cos(d)\cos(t) + r^2\sin(d)\sin(b),$$

og hermed har vi vist, at

$$\sin(h) = \sin(b)\sin(d) + \cos(b)\cos(d)\cos(t).$$

□

Bemærkning 9 Solen er tegnet med en timevinkel $0^\circ < t < 90^\circ$, men beviset gælder umiddelbart for alle værdier af t, da det sfæriske koordinatsæt er korrekt i alle tilfælde. □

Eksempel 10
Vi finder solhøjden ved midsommer på 55°N bredde, når solen står højest på himlen. Deklinationen er så 23,45°, og timevinklen er 0°. Vi får så, at

$$\sin(h) = \sin(55^\circ)\sin(23{,}45^\circ) + \cos(55^\circ)\cos(23{,}45^\circ)\cos(0^\circ),$$

og heraf fås, at $h = 58{,}45°$. I følge en additionsformel for cosinus (se evt. appendiks 6.1.23), får vi også, at $\sin(h) = \cos(55° - 23{,}45°)$, altså er $h = 90° - 31{,}55° = 58{,}45°$.

Ved hjælp af et simpelt geometrisk argument er det let at indse, at solens middagshøjde altid er givet ved formlen:

$$h = 90° - b + d$$

i overensstemmelse med ovenstående resultat. □

Øvelse 11 Gør dette. □

Den næste sætning giver os mulighed for at bestemme azimuth:

Sætning 12 $\sin(Az) = \dfrac{\cos(d)\sin(t)}{\cos(h)}$.

Bevis Vi drejer koordinatsystemet om x-aksen, således at horisontplanet kommer til at ligge i xy-planet. Punktet S får så de sfæriske koordinater $(r{,}90° - Az{,}h)$, men dvs. at

$$\begin{aligned} S &= (r\cos(h)\cos(90° - Az), r\cos(h)\sin(90° - Az), r\sin(h)) \\ &= (r\cos(h)\sin(Az), r\cos(h)\cos(Az), r\sin(h)). \end{aligned}$$

Men da S har samme x-koordinat som før drejningen, får vi den følgende ligning

$$\cos(h)\sin(Az) = \cos(d)\sin(t),$$

og hermed er sætningen bevist. □

Bemærkning 13 Da højden indgår i formlen, skal den altså bestemmes først jvf. sætning 8. Det er også muligt at lave en formel, som gør det muligt at bestemme azimuth direkte ud fra b, d og t (formel 24 i appendiks 6.2), men da den er ret besværlig at udlede i *alle* detaljer, vil vi holde os til ovenstående formel.

I næste eksempel indgår der en del detaljer (som fx. tidsregningen MET og solens kulminationstidspunkt), som bliver uddybet lige efter eksemplet.

Eksempel 14 Vi regner et eksempel fra almanakken[1]: Find retningen til solen den 25.juni kl. 10.30 (MET) i Skagen.

Skagens geografiske bredde er $57°43' = 57.7167°$. Solens deklination den 25.juni (176) er $23°24' = 23.4°$.

Vi mangler nu timevinklen, som vi skal finde ud fra lokaltiden kl. 10.30. Da solen kulminerer kl 12.20 (jvf. almanakken), må timevinklen være -1t 50min = -1,8333 t. Den skal omregnes til grader, og da solen flytter sig 15° i timen, skal vi gange med 15: $t = -27.4995°$.

Vi kan nu beregne solens højde ved hjælp af sætning 8, og vi får $h = 50.4034°$ $(50°24')$. Vi indsætter i sætning 12, og vi får $Az = -41.67°$ $(-41°40')$.

Hvis man kigger mod syd, skal man altså dreje ansigtet ca. 42° mod øst, og ca. 50° opad for at kigge mod solen. □

[1]Skriv -og rejsekalender 1985, Københavns Universitet

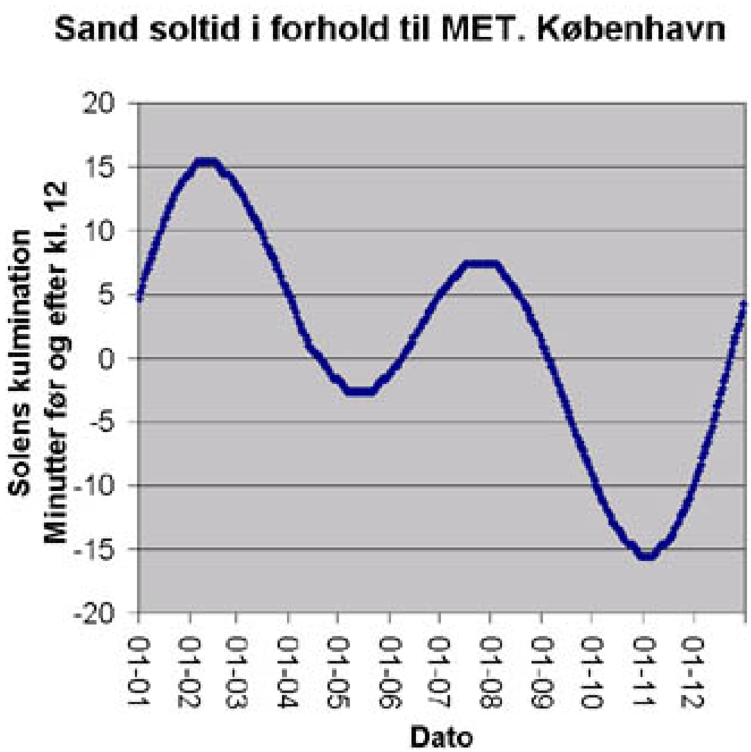
Øvelse 15 I ovenstående beregninger er der ikke taget hensyn til sommertiden, så timevinklen skal korrigeres med 1 time.

Bestem den korrekte retning til solen. □

Som vi kan se af ovenstående, skal vi kende solens kulminationstidspunkt for at finde timevinklen til et bestemt klokkeslæt. I Danmark bruger vi mellemeuropæisk tid (MET), dvs. at vi er 1 time forud for Greenwich-tiden, hvilket svarer til 15° øst for Greenwich. Da Københavns længdegrad er 12°34'40", vil solen først kulminere 9 min 41 s *efter* klokken 12.

Øvelse 16 Vis dette. □

Ovenstående bygger på begrebet middelsoltid, hvor hvert soldøgn er nøjagtig 24 t. I virkeligheden er det lidt anderledes, da soldøgnets længde varierer med årstiden, og derfor vil kulminationstidspunktet også variere med årstiden (ca. kl. 12.09 ± 16min), jvf. følgende graf (fra almanakken):



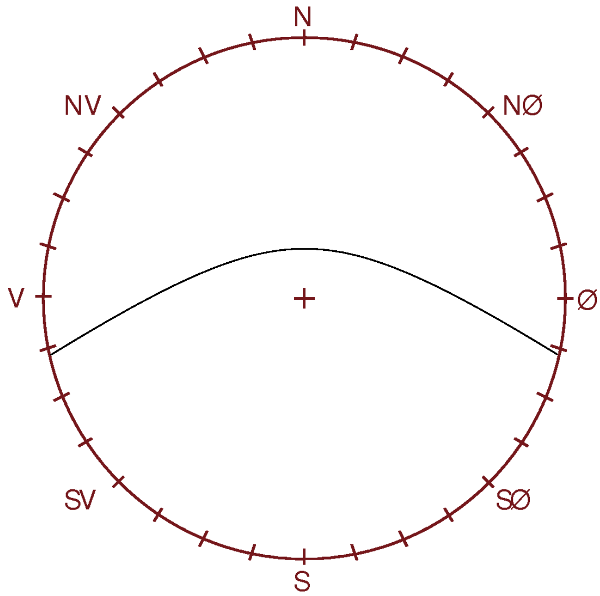
Bemærk, at grafen kan misforstås, idet den går ud fra kl. 12 i stedet for kl. 12.09. Kulminationstidspunktet i København varierer altså fra ca. kl. 11.53 til ca. kl. 12.25 i MET.

Grunden til at soldøgnet varierer med årstiden skyldes to faktorer: solens bane omkring jorden (i virkeligheden er det omvendt) er ikke cirkulær, men elliptisk, og for det andet at jordaksen danner en vinkel på 23,5° til solens bane.

Øvelse 17 Bestem solens kulminationstidspunkt (MET) i Esbjerg den 1/10, når Esbjerg har længdegraden 8°26'42" . □

5 Solkompasset

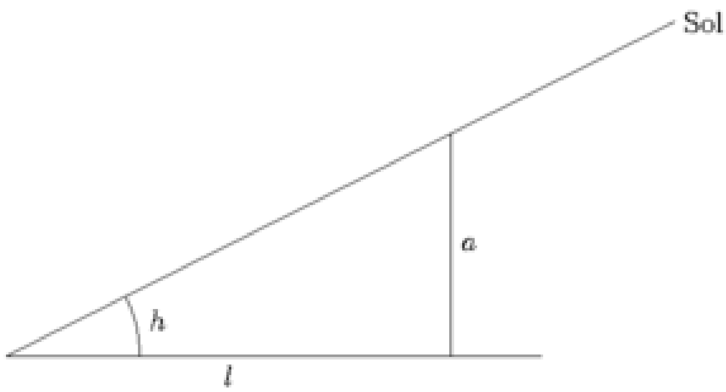
Det er let at lave et solkompas i praksis: Tegn en cirkel med radius 4 cm eller mere på et stykke karton. Inddel cirklen efter verdenshjørnerne og stik en tegnestift igennem centrum. Læg kompasset i solen på et vandret underlag, og afsæt fx. hver halve time en prik for enden af den skygge som tegnestiften giver. Når dagen er gået optegnes skyggekurven gennem de afsatte punkter. Solkompasset kan nu bruges de næste 3-4 dage. Det skal altid holdes vandret, og det skal orienteres således, at skyggen rammer skyggekurven. Da der er to muligheder, skal du vide om du bruger det før eller efter middag. Når kompasset er orienteret rigtigt, har du styr på verdenshjørnerne.



Vi kan også let konstruere solkompasset ud fra vores teori. Punkterne på skyggekurven afhænger af retningen til solen (Az) og af solens højde (h), idet skyggens længde (l) er givet ved

$$l = \frac{a}{\tan(h)},$$

hvor a er tegnestiftens længde. jvf. den følgende tegning:



Men det betyder, at vi blot skal afsætte punktet[2]

$$(l\cos(Az), l\sin(Az))$$

for enhver timevinkel t i et koordinatsystem med Origo i cirklens centrum. I praksis skal vi begrænse os til vores cirkel, men dvs. at l skal være mindre end eller lig med radius,

[2] se dog bemærkning 19

og vi kan også let begrænse os til den tid, hvor solen er på himlen, idet højden ellers er negativ.

I beregningerne indgår også breddegraden, og solens deklination. Da vi tidligere har udledt en formel for deklinationen, som afhænger af dagens nummer i året, kan vi hermed tegne solkurver for en hvilken som helst dag i året for en vilkårlig breddegrad.

Øvelse 18 Lav og udfyld en tabel som den nedenstående og tegn solkurven op i et koordinatsystem (brug fx. datoen 1/6 (152), breddegraden 55° og en 'tegnestift' på 20 mm):

t	-6t	-5t	-4t	-3t	-2t	-1t	0t	1t	2t	3t	4t	5t	6t
h													
Az													
l													
$l\cos(Az)$													
$l\sin(Az)$													

Øvelsen kan med fordel laves i et regneark.

Bemærk, at solkurven bliver symmetrisk om x-aksen, således at nord er i x-aksens retning. □

Bemærkning 19 Solkurven bliver kun rigtig, når azimuth (i radianer) ligger i intervallet $[-\pi/2;\pi/2]$; ellers skal azimuth skifte fortegn og der skal trækkes π fra eller lægges π til afhængig af om azimuth er mindre end $-\pi/2$ eller større end $\pi/2$. Årsagen er den enkle, at $\sin^{-1}$ altid giver en vinkel i intervallet $[-\pi/2;\pi/2]$, mens Az tilhører intervallet $[-\pi;\pi]$. Det kræver lidt snilde at få dette til at fungere i et regneark. □

Endelig kan du også downloade et computerprogram, der kan lave solkompasset for dig, se

HTTP://WWW.HAVHINGSTEN.DK/INDEX.PHP?ID=776&L=0

6 Appendiks

6.1 Diverse formler

I noterne anvendes bl.a. følgende elementære formler

1. For alle $v \in R$:

$$\cos(90^\circ - v) = \sin(v) \tag{20}$$
$$\sin(90^\circ - v) = \cos(v) \tag{21}$$

2. Hvis v er vinklen mellem to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, gælder

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(v) \tag{22}$$

3. For alle $s, t \in R$ gælder

$$\cos(s - t) = \cos(s)\cos(t) + \sin(s)\sin(t) \tag{23}$$

6.2 Sfærisk trigonometri

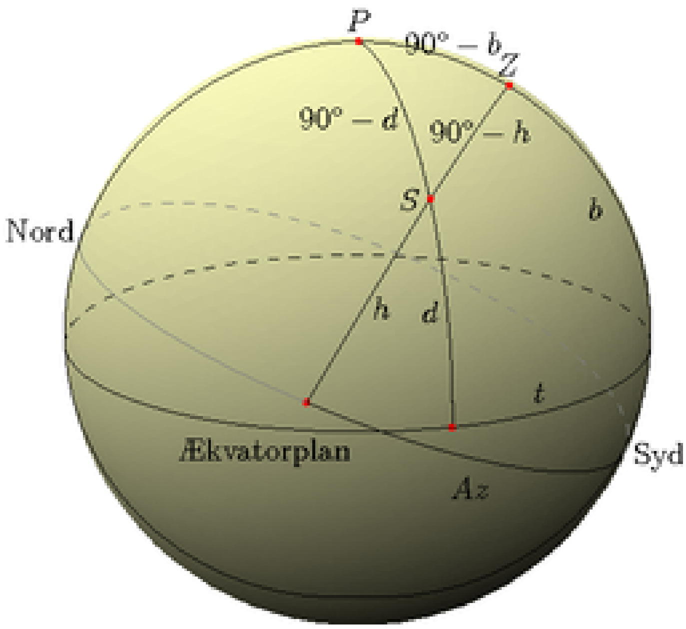
I dette afsnit viser vi, hvorledes vores resultater kan udledes ved hjælp af formler fra den sfæriske trigonometri jvf. litteraturlisten. Afsnittet kræver derfor forhåndskendskab til dette emne.

Formlen i sætning 12 kan også bevises direkte ud fra en af sinusrelationerne i en sfærisk trekant:

$$\sin(a)\sin(C) = \sin(c)\sin(A)$$

jvf. litteraturlisten [2], formel F2 side 49.

Bevis Ved et passende valg af symboler i den sfæriske trekant PSZ ($A = P$ og $C = Z$) :



får vi

$$
\begin{aligned}
\sin(90^\circ - h)\sin(180^\circ - Az) &= \sin(90^\circ - d)\sin(t) \Leftrightarrow \\
\cos(h)\sin(Az) &= \cos(d)\sin(t) \Leftrightarrow \\
\sin(Az) &= \frac{\cos(d)\sin(t)}{\cos(h)} .
\end{aligned}
$$

□

I almanakken angives følgende formel for azimuth:

$$
\tan(Az) = \frac{\cos(d)\sin(t)}{\sin(b)\cos(d)\cos(t) - \cos(b)\sin(d)} . \tag{24}
$$

Vi viser nu, hvordan den kan udledes ud fra vores formel kombineret med den følgende generelle formel fra den sfæriske trigonometri:

$$
\sin(a)\cos(C) = \cos(c)\sin(b) - \sin(c)\cos(b)\cos(A) .
$$

jvf. litteraturlisten [2], formel F3 side 50.

Bevis Vi bruger ovenstående formel på vores trekant, og får

$$
\sin(90^\circ - h)\cos(180^\circ - Az) = \cos(90^\circ - d)\sin(90^\circ - b) - \sin(90^\circ - d)\cos(90^\circ - b)\cos(t)
$$

altså

$$
\cos(h)\cdot(-\cos(Az)) = \sin(d)\cos(b) - \cos(d)\sin(b)\cos(t)
$$

og dermed, at

$$
\cos(Az) = \frac{\cos(d)\sin(b)\cos(t) - \sin(d)\cos(b)}{\cos(h)}
$$

Hvis vi nu dividerer vores formel fra sætning 12 :

$$
\sin(Az) = \frac{\cos(d)\sin(t)}{\cos(h)}
$$

med ovenstående formel, fremkommer almanakkens formel uden videre. □

Bemærkning 25 Fordelen ved formel 24 er, at man får udtrykt azimuth som en funktion af timevinklen (t), når man holder deklinationen og breddegraden fast, altså når man følger solen en bestemt dag på en bestemt breddegrad.

7 Litteraturliste

Læseværdige gymnasiebøger:

1. MATEMATIK FOR MF, GEOMETRI af *Jonny Schultz*, Forlaget TRIP 1985
   Bogen indeholder et meget overskueligt og letlæst kapitel om Sfærisk geometri (se kap. VI).

2. ASTRONOMISK NAVIGATION af *Erik Vestergaard*, Matematiklærerforeningen 1997.
   Meget grundig gennemgang af emnet. Halvdelen af bogen indeholder oplæg til større øvelser herunder også opgaver, der lægger op til solkompasset. Bogen indeholder også et afsnit med beviser for de sfæriske trigonometriske formler. Sværhedsgraden er for det meste ret stor.

Preben M. Henriksen, juli 2007